

作业 12

1 Problem 1

运用 warshall 算法计算出关系 R 的传递闭包 $t(R)$. (写出最外层循环每次迭代的结果作为计算过程)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Problem 2

对于定义在非空集合上的关系 R ,

1. 试证明: 若 R 是自反的, 则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的
2. 试证明: 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 也是传递的
3. 找出一个反例, 使得 R 是传递的, 但 $s(R)$ 不是传递的

3 Problem 3

定义关系 R 上的“等价闭包” $e(R)$ 为满足下列两个性质的关系:

1. $e(R)$ 是一个等价关系
2. 对于任何等价关系 R' , 如果 $R \subseteq R'$, 那么 $e(R) \subseteq R'$

试证明: 对于定义在非空集合上的关系 R , $tsr(R) = e(R)$

4 Problem 4

判断以下函数 $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 是否是满射的 (如果不是, 简述理由或给出反例)

1. $f(m, n) = m + n$
2. $f(m, n) = m - n$

$$3. f(m, n) = |m| - |n|$$

$$4. f(m, n) = m^2 + n^2$$

$$5. f(m, n) = m^2 - n^2$$

5 Problem 5

试证明：若 $h \in A_A$,

$$(\forall f)(\forall g)((f \in A_A \wedge g \in A_A \wedge h \circ f = h \circ g) \rightarrow f = g) \Leftrightarrow h \text{ 是单射的}$$

6 Problem 6

对于以下函数分别回答以下问题。

- a) 函数 f 是否是单射的、满射的、双射的。若 f 是双射的，求出 f^{-1} 的表达式
- b) 关系 $R = \{\langle x, y \rangle | x, y \in \text{dom}(f) \wedge f(x) = f(y)\}$ 是定义在 $\text{dom}(f)$ 上的等价关系，试写出关系 R

函数：

$$1. f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = 2^x$$

$$2. f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n + 1$$

$$3. f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = |x|$$

$$4. f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(n) = \langle n, n + 1 \rangle$$

$$5. f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \frac{2x+1}{4}$$