

Review

TA

2020-12-19



P187 定理10.8.5

定理 10.8.5 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 若 A 中元素为 $mn+1$ 个, 则 A 中或者存在一条长度为 $m+1$ 的反链, 或者存在一条长度为 $n+1$ 的链.

反证法:

原题:

若 $|A|=mn+1$, 则存在一条长度 $m+1$ 的反链 $\vee$ 存在一条长度 $n+1$ 的链

等价于证明:

若 A 中所有反链长度不大于 $m \wedge A$ 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$

P187 定理10.8.5

定理 10.8.5 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 若 A 中元素为 $mn+1$ 个, 则 A 中或者存在一条长度为 $m+1$ 的反链, 或者存在一条长度为 $n+1$ 的链.

反证法:

原题:

P

若 $|A|=mn+1$, 则存在一条长度 $m+1$ 的反链 $\vee$ 存在一条长度 $n+1$ 的链

等价于证明:

若 A 中所有反链长度不大于 $m \wedge A$ 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$

$\neg P$ = “不存在一条长度为 $m+1$ 的反链”

P187 定理10.8.5

定理 10.8.5 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 若 A 中元素为 $mn+1$ 个, 则 A 中或者存在一条长度为 $m+1$ 的反链, 或者存在一条长度为 $n+1$ 的链.

反证法:

原题:

P

若 $|A|=mn+1$, 则存在一条长度 $m+1$ 的反链 $\vee$ 存在一条长度 $n+1$ 的链

等价于证明:

若 A 中所有反链长度不大于 $m \wedge A$ 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$

$\neg P$ = “不存在一条长度为 $m+1$ 的反链”

【反链的子集都是反链, 所以不存在长度 $m+1$ 的反链意味着不存在 $m+2, m+3 \dots$ 】

P187 定理10.8.5

定理 10.8.5 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 若 A 中元素为 $mn+1$ 个, 则 A 中或者存在一条长度为 $m+1$ 的反链, 或者存在一条长度为 $n+1$ 的链.

反证法:

原题:

P

若 $|A|=mn+1$, 则存在一条长度 $m+1$ 的反链 $\vee$ 存在一条长度 $n+1$ 的链

等价于证明:

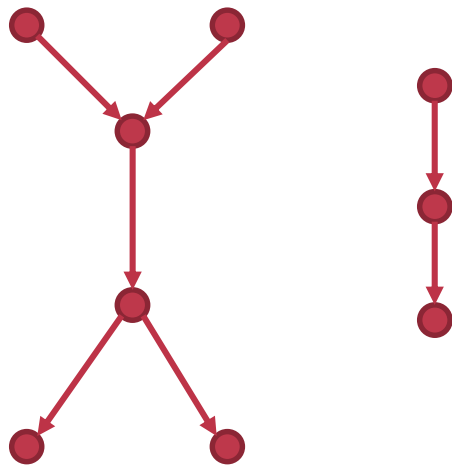
若 A 中所有反链长度不大于 m $\wedge$ A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$

$\neg P$ = “不存在一条长度为 $m+1$ 的反链”

【反链的子集都是反链, 所以不存在长度 $m+1$ 的反链意味着不存在 $m+2, m+3 \dots$ 】

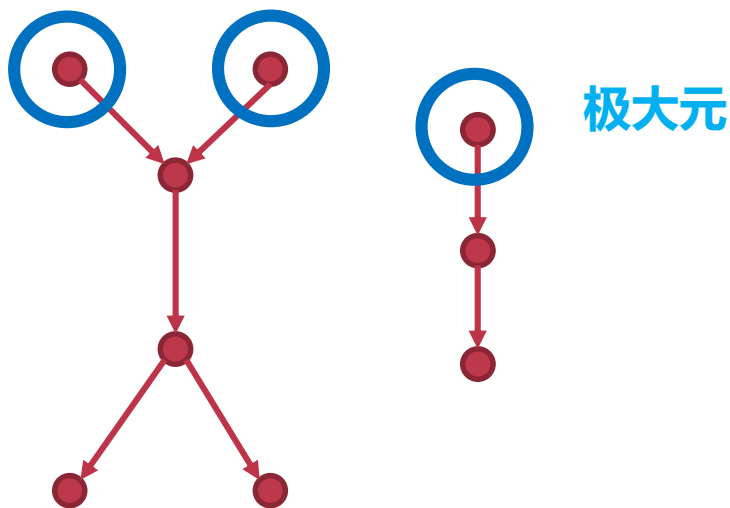
P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



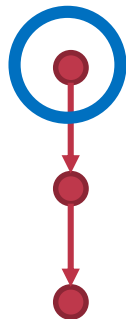
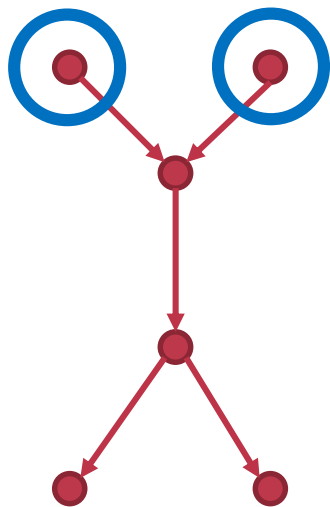
P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n ，则 $|A| \leq mn$



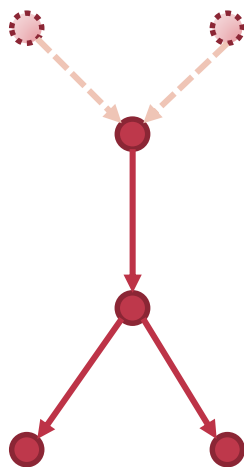
极大元

极大元一定能构成反链

【反证：如果极大元的集合中有两个元素可比，那么二者中较小的就不是极大元】

P187 定理10.8.5

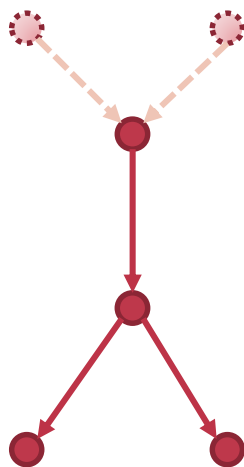
若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



去掉 A 中的所有极大元,
 A 仍然是偏序集

P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$

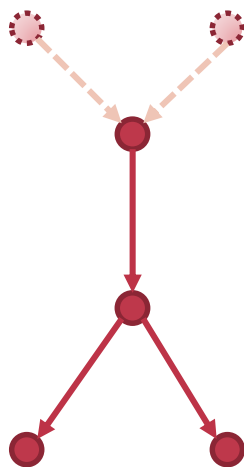


去掉 A 中的所有极大元,
 A 仍然是偏序集

并且 A 中最长链一定会变短

P187 定理10.8.5

若偏序集A中所有反链长度不大于 m 且A中所有链长度不大于 n ，则 $|A| \leq mn$

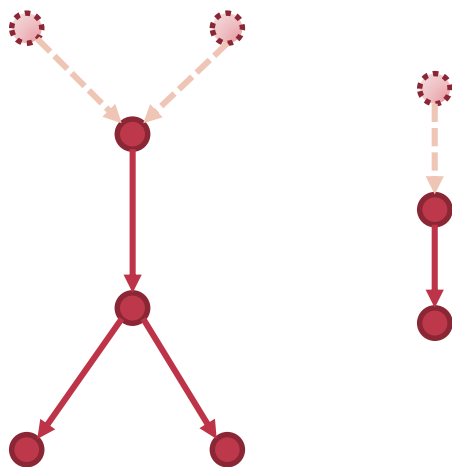


**去掉A中的所有极大元，
A仍然是偏序集**

并且A中最长链一定会变短
假设原来最长链的集合为S
 $\forall x \in S$ ，x都包含一个极大元
【因为最长链一定既有极大元
又有极小元，否则就不是最长】

P187 定理10.8.5

若偏序集A中所有反链长度不大于 m 且A中所有链长度不大于 n ，则 $|A| \leq mn$

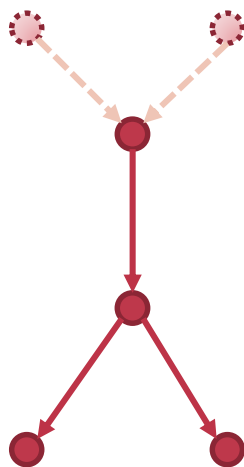


**去掉A中的所有极大元，
A仍然是偏序集**

并且A中最长链一定会变短
假设原来最长链的集合为S
 $\forall x \in S$ ，x都包含一个极大元
【因为最长链一定既有极大元
又有极小元，否则就不是最长】

P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m $\wedge$ A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$

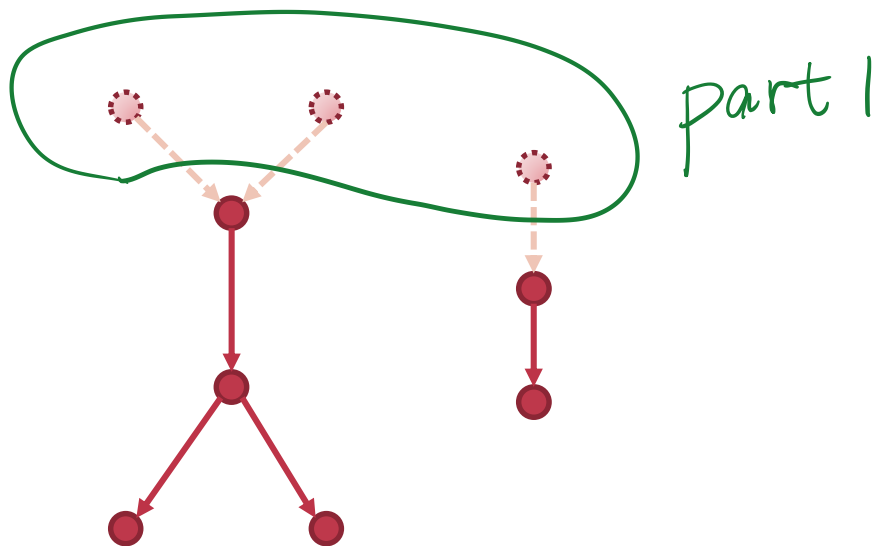


去掉 A 中的所有极大元,
 A 仍然是偏序集

并且 A 中最长链一定会变短
最长链长度 $l \Rightarrow l - 1$

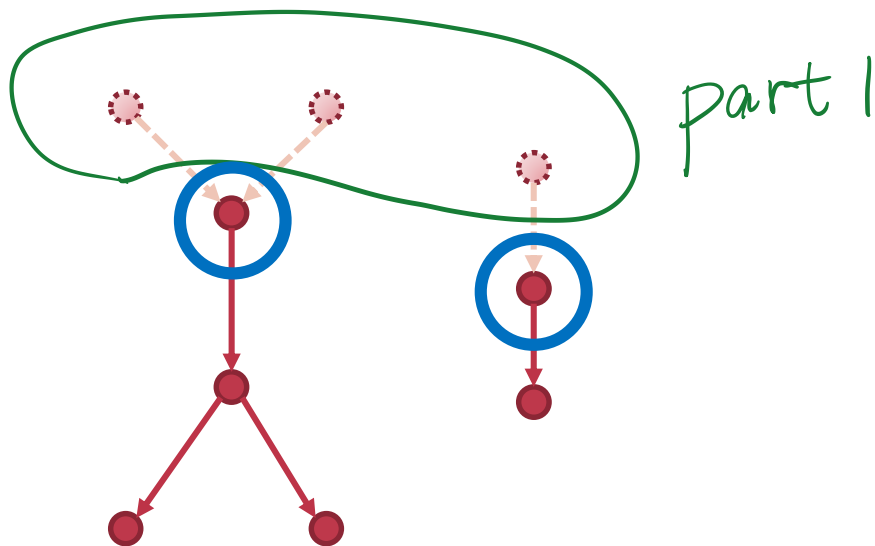
P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



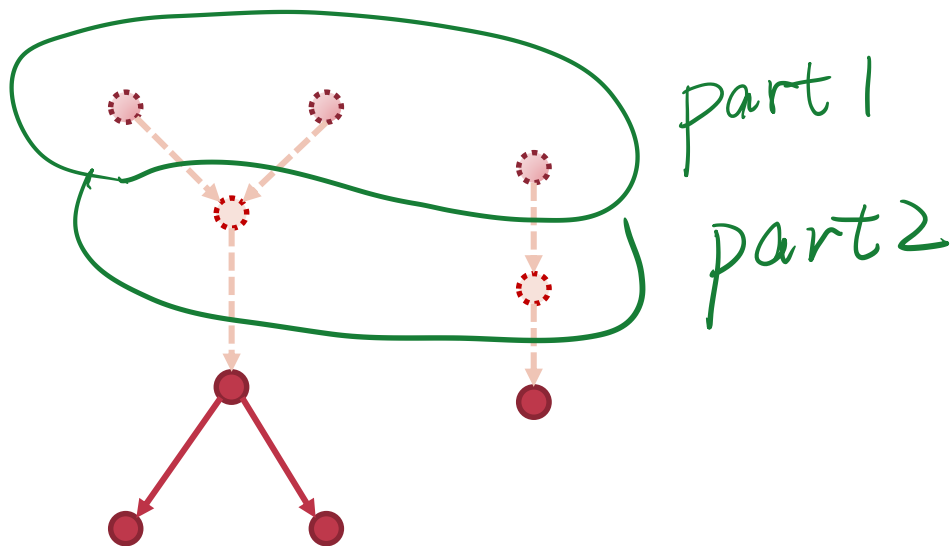
P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



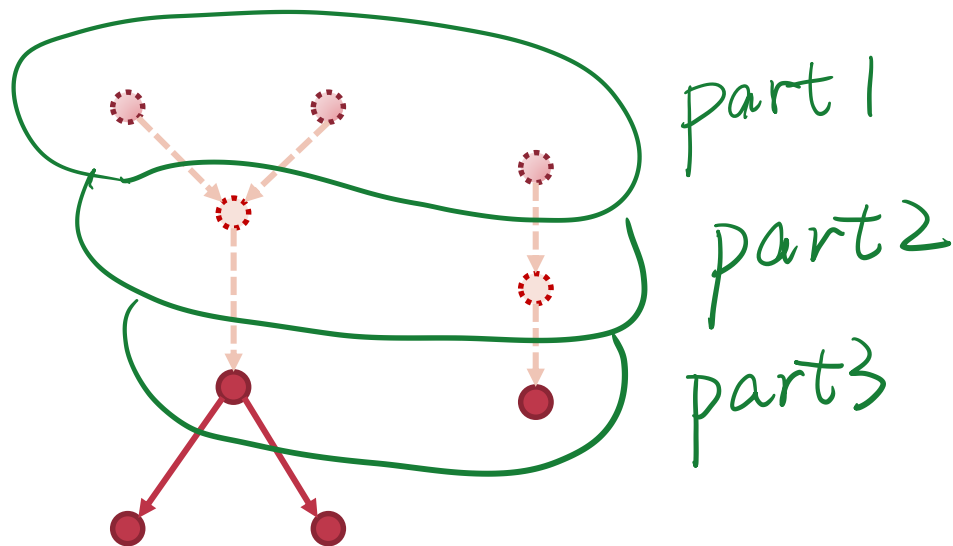
P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



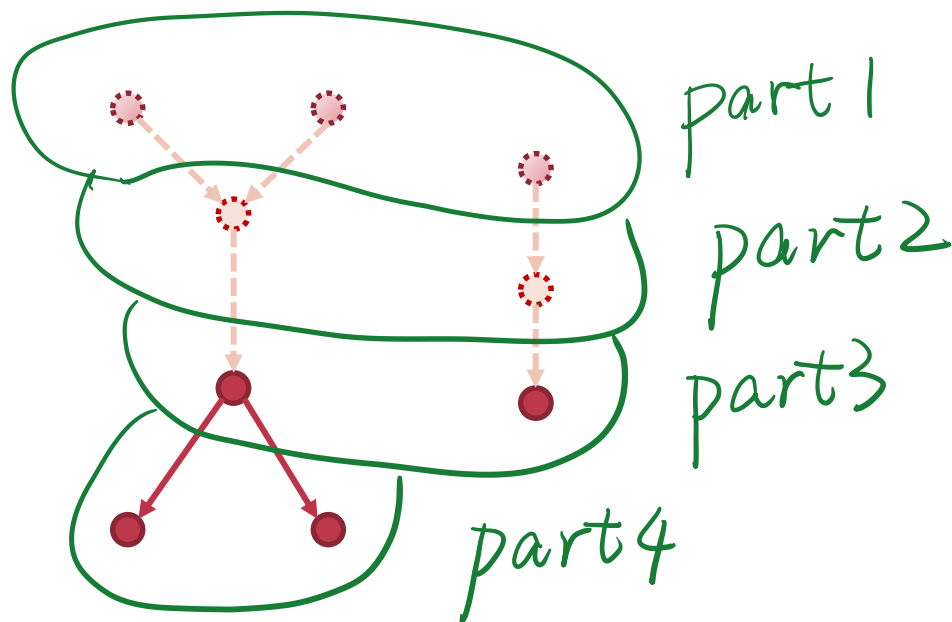
P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



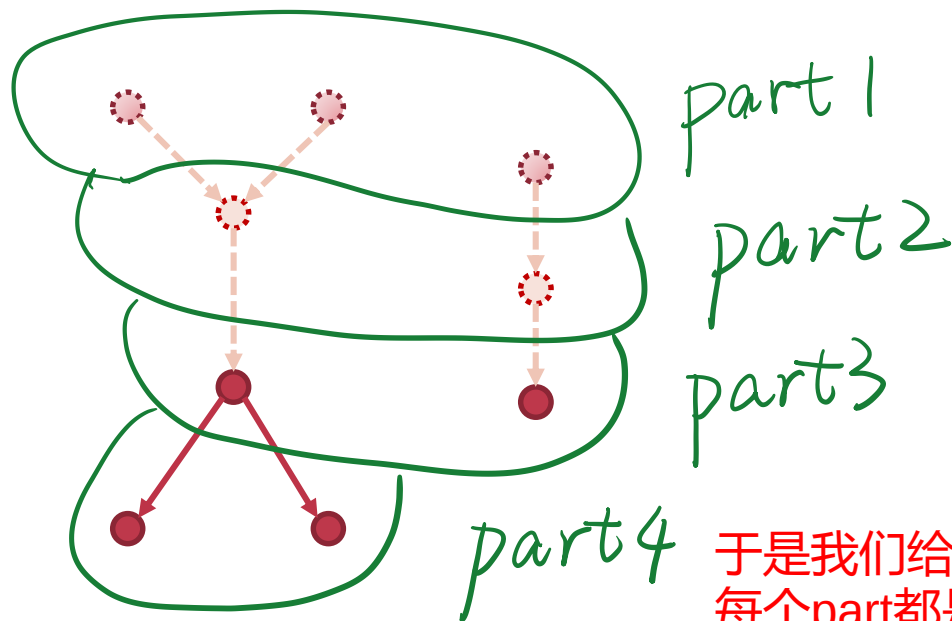
P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



P187 定理10.8.5

若偏序集 A 中所有反链长度不大于 m 且 A 中所有链长度不大于 n , 则 $|A| \leq mn$



于是我们给出了 A 的一个划分, 每个part都是反链, 并且part数量与最长链长度相同

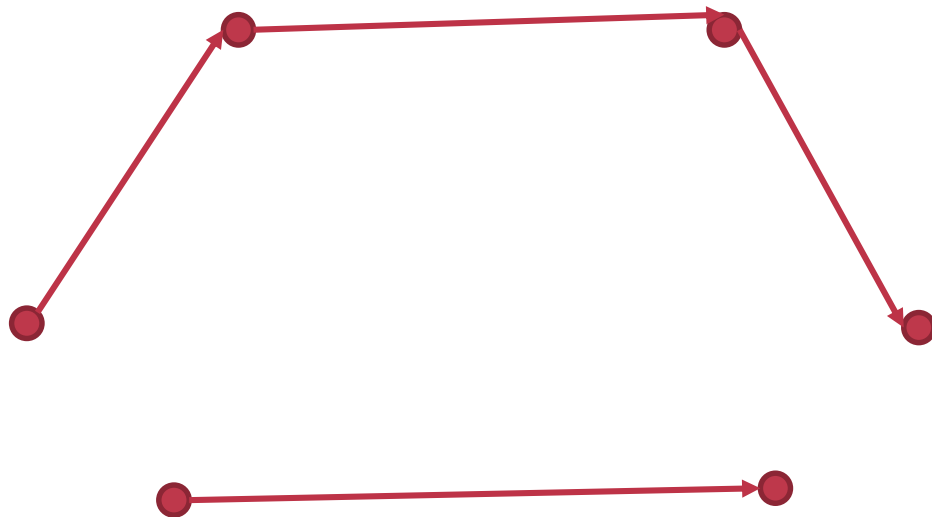
P187 定理10.8.5

- 引理

- 链的子集都是链
- 反链的子集都是反链
- 所有极大（小）元构成的集合是反链
- 最长的链中，一定又有极大元又有极小元

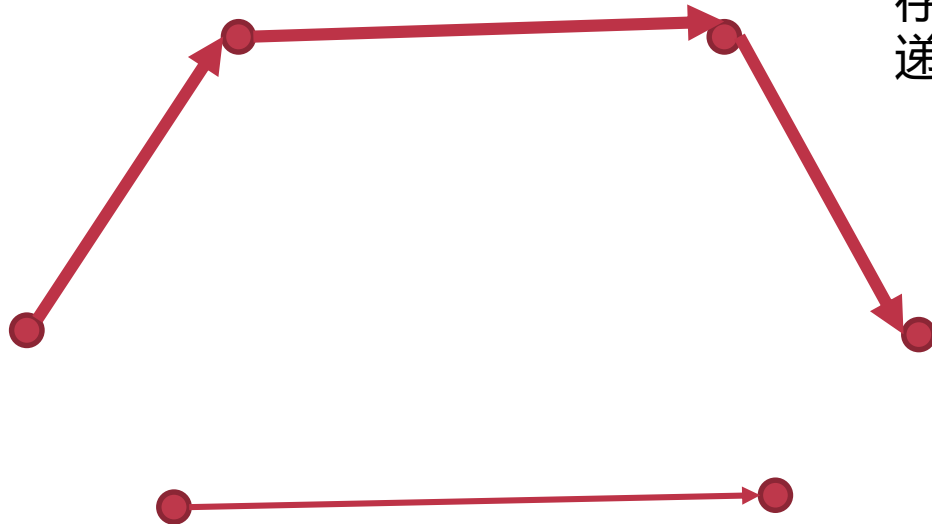
Warshall算法

- 关系图中构造传递闭包



Warshall算法

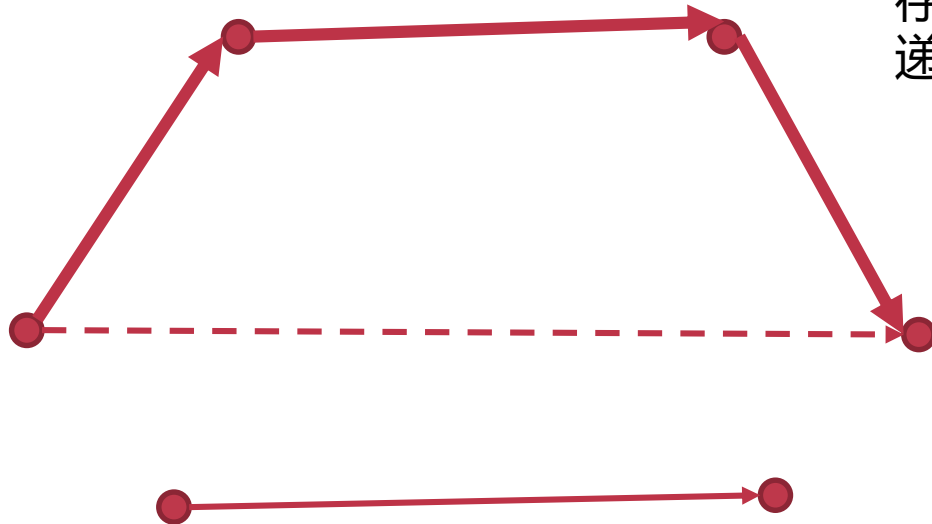
- 关系图中构造传递闭包



如果两个节点在关系图中存在**路径**，那么他们在传递闭包中应该存在**连边**

Warshall算法

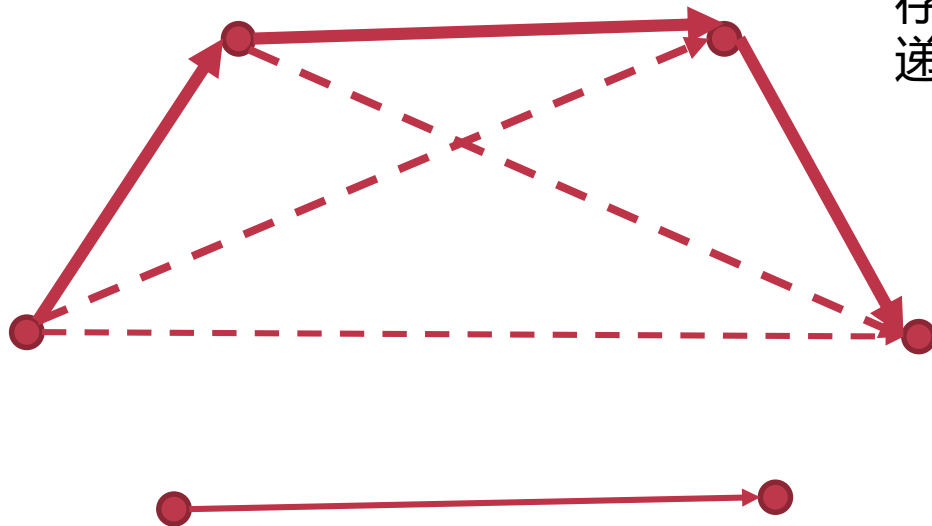
- 关系图中构造传递闭包



如果两个节点在关系图中存在**路径**，那么他们在传递闭包中应该存在**连边**

Warshall算法

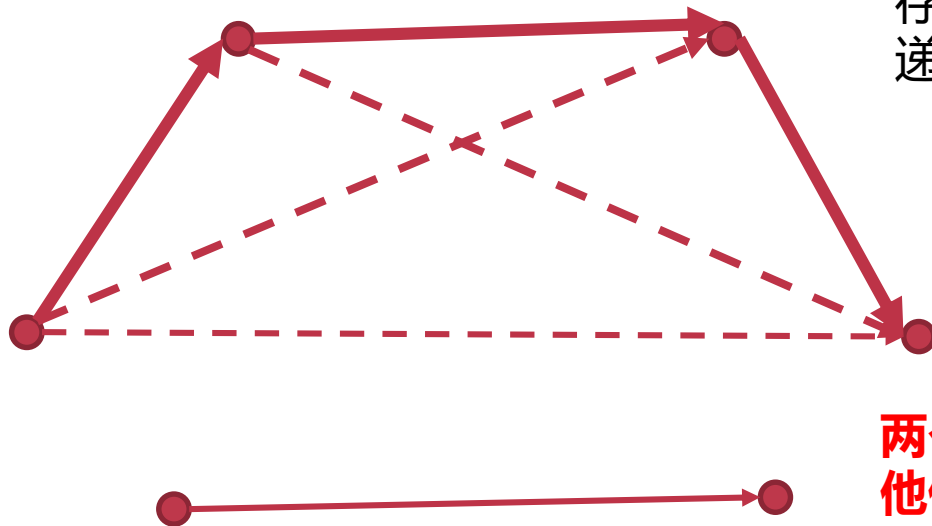
- 关系图中构造传递闭包



如果两个节点在关系图中存在**路径**，那么他们在传递闭包中应该存在**连边**

Warshall算法

- 关系图中构造传递闭包



如果两个节点在关系图中存在**路径**，那么他们在传递闭包中应该存在**连边**

两个节点存在连边，意味着他们之间的最短路径长度为1

Warshall算法

Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

 for $j \leftarrow 1$ to n :

 if $M^{i-1}[j, i] == 1$:

 for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

return M^n

Warshall算法

Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] == 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

return M^n

关系矩阵与关系图

关系矩阵的下标~关系图的点

$M[i, j] = 1$ 相当于 $P_i \rightarrow P_j$

Warshall算法

Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

遍历 P_i $i \leftarrow 1$ to n :

对于 P_i , 遍历 P_j $j \leftarrow 1$ to n :

如果 $P_j \rightarrow P_i$ $\text{if } M^{i-1}[j, i] == 1$:

遍历所有节点 P_k $\text{for } k \leftarrow 1$ to n :

若 $P_i \rightarrow P_k$, 则 $M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

连 $P_j \rightarrow P_k$

$\text{return } M^n$

关系矩阵与关系图

关系矩阵的下标~关系图的点

$M[i, j] = 1$ 相当于 $P_i \rightarrow P_j$

Warshall算法

遍历 P_i

对于 P_i , 遍历 P_j

如果 $P_j \rightarrow P_i$

遍历所有节点 P_k

若 $P_i \rightarrow P_k$, 则
连 $P_j \rightarrow P_k$

Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

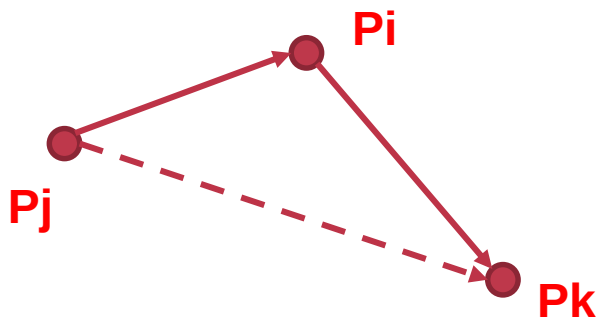
for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] = 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

return M^n



连接了 P_i 的前驱和后继

Warshall算法



Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

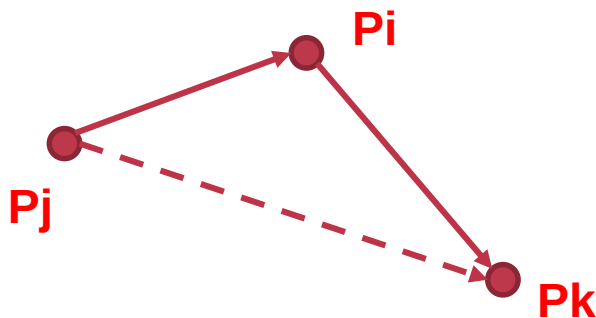
for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] == 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

return M^n



连接了 P_i 的所有前驱和所有后继

Warshall算法

遍历 P_i

对于 P_i , 遍历 P_j

如果 $P_j \rightarrow P_i$

遍历所有节点 P_k

若 $P_i \rightarrow P_k$, 则
连 $P_j \rightarrow P_k$

Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] == 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

return M^n



若 P_m 与 P_n 之间有一条路径, 那么一定有一条**最短路径**其中**没有重复节点**

例如, 最短路径= $[P_m, P_{i1}, P_{i2}, P_n]$

Warshall算法



Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] == 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

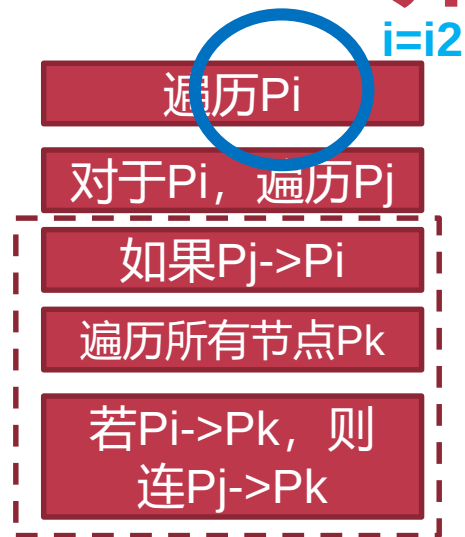
return M^n



若 P_m 与 P_n 之间有一条路径, 那么一定有一条**最短路径**其中**没有重复节点**

路径= $[P_m, P_{i1}, P_{i2}, P_n]$

Warshall算法



Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

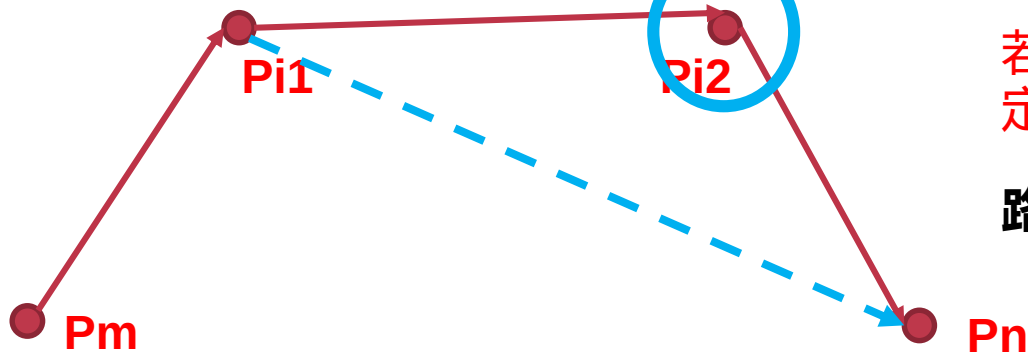
for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] == 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

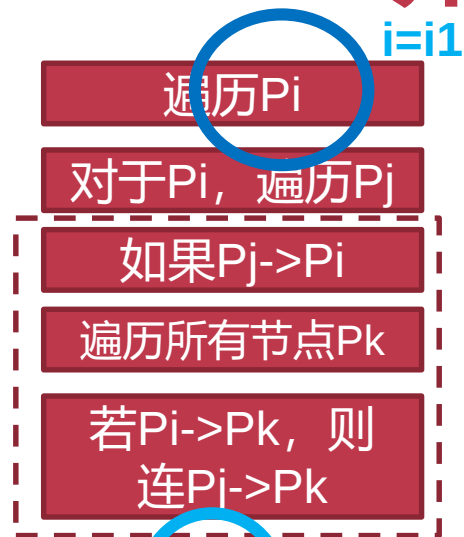
return M^n



若 P_m 与 P_n 之间有一条路径, 那么一定有一条**最短路径**其中**没有重复节点**

路径= $[P_m, P_{i1}, P_{i2}, P_n]$

Warshall算法



Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

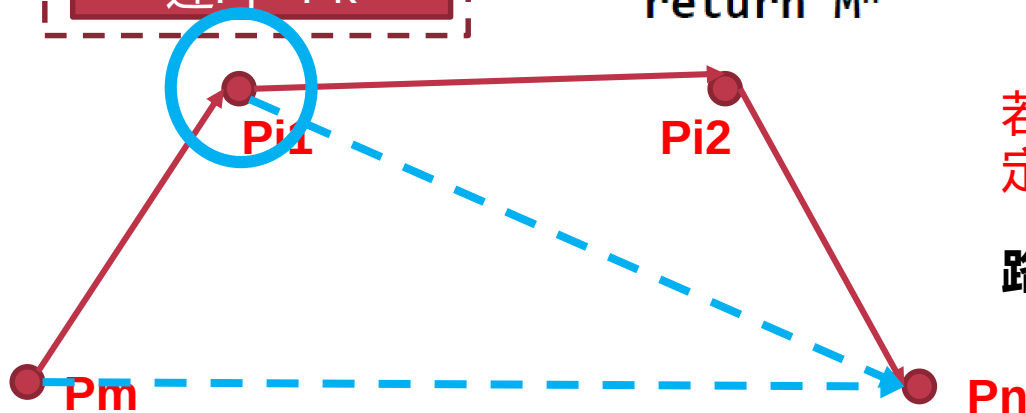
for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] == 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

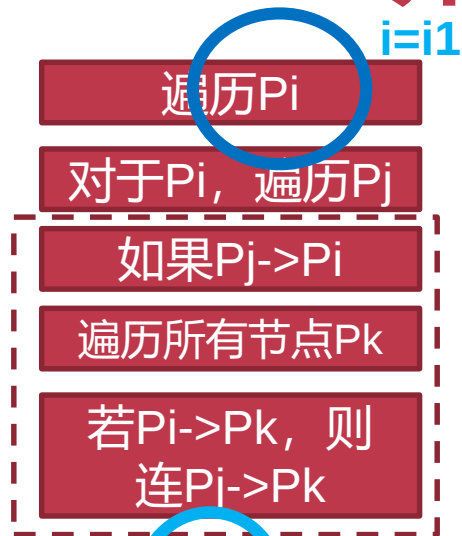
return M^n



若 P_m 与 P_n 之间有一条路径, 那么一定有一条**最短路径**其中**没有重复节点**

路径= $[P_m, P_{i1}, P_{i2}, P_n]$

Warshall算法



Warshall_Algorithm($M[1..n, 1..n]$):

$M^0 \leftarrow M$

for $i \leftarrow 1$ to n :

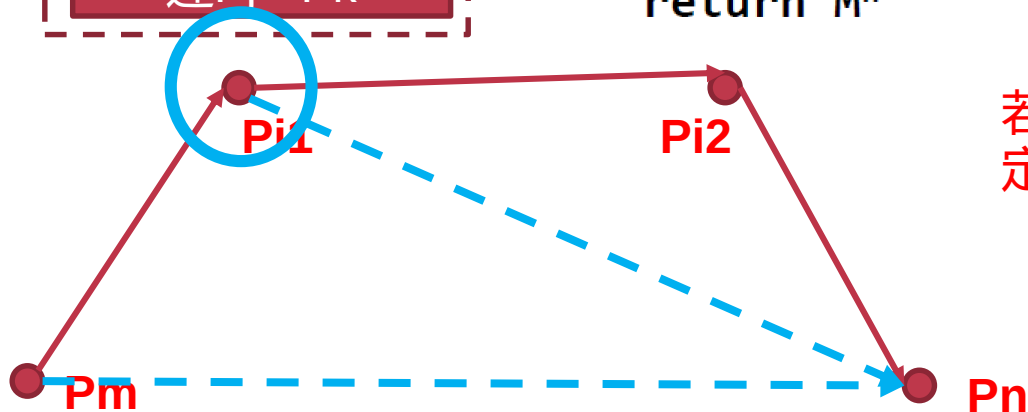
for $j \leftarrow 1$ to n :

if $M^{i-1}[j, i] = 1$:

for $k \leftarrow 1$ to n :

$M^i[j, k] = M^{i-1}[j, k] \vee M^{i-1}[i, k]$

return M^n



若 P_m 与 P_n 之间有一条路径, 那么一定有一条**最短路径**其中**没有重复节点**

P_m 与 P_n 有任意性,
经过他这个算法之后, 一定会有
路径= $[P_m, P_n]$



Q&A