

离散数学习题课

命题逻辑

2023.10.18

► 习题课内容

- 作业讲解
- Lab1讲解
- Tseytin变换算法（补充内容）
- 答疑

▶ 作业讲解之前

请及时完成复习作业和预习作业！

善用Grace Day

命题

未回答

问题 2

0 / 10 分

请选出下列语句中不是命题的选项。

正确回答

☐ $x + y > 54749110$

正确回答

☐ 这道题目很难吗?

正确回答

☐ 这个选项是错误的。

正确回答

☐ 好简单的题呀!

悖论不是命题

原子命题

未回答	问题 3	0 / 10 分
	以下哪些命题是原子命题?	
	☐ 水至清则无鱼。	
	☐ 我好喜欢离散数学啊!	
正确答案	☐ 海绵宝宝是黄色的。	
正确答案	☐ 我和你是朋友。	
	☐ 今天是星期三而且今天是晴天。	

P : 水至清, Q : 水无鱼, $P \rightarrow Q$

命题形式化

未回答

问题 2

0 / 10 分

下列选项中表述正确的是？

☐

若 P 表示 Tom 是一个男生, Q 表示 Tom 是一个女生, 那么 Tom 是一个男生或者 Tom 是一个女生表示为 $P \vee Q$ 。

☐

若用 R 表示命题“海绵宝宝和派大星是朋友”, 则有 $R = P \wedge Q$, 其中 P 表示海绵宝宝是朋友, Q 表示派大星是朋友。

☐

若 P 表示“我可以做对这道题目”, Q 表示“你可以做对这道题目”, 那么“我或你都可以做对这道题目”可以表示为 $P \vee Q$

☐

设 P : 我听课, Q : 我睡觉, 则命题 “我不能一边听课, 一边睡觉”可以表示为 $P \rightarrow \neg Q$ 。

正确答案

Tom不可能既是男生又是女生:

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

“或” 不一定使用析取:

$$P \wedge Q$$

独立完备集

独立完备集: $\{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$

未回答

问题 10

0 / 10 分

以下哪些联结词集合不是独立完备集?

☐ $\{\neg, \rightarrow\}$ $\neg P \rightarrow Q = \neg(\neg P) \vee Q = P \vee Q$

或非: $P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$

☐ $\{\downarrow\}$

$P \downarrow P = \neg(P \vee P) = \neg P$

$(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) = \neg(P \downarrow Q) = P \vee Q$

正确回答

☐ $\{\neg, \leftrightarrow\}$

不完备, 因为只由这两个符号构成的二元表达式中或全T, 或全F, 或2T2F

正确回答

☐ $\{\neg, \wedge, \vee\}$

不独立: $P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

Switch Variable

未回答

问题 1

0 / 10 分

使用 switch variable 把一个公式化成 CNF 时，转换得到的公式与原本的公式必定等值。

☐ True

正确答案

☐ False

可满足性等价，但不等值

Switch Variable

未回答

问题 10

0 / 10 分

$(A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4) \vee (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4)$ 使用 switch variable 转化成 CNF 后会包含几个子句?

☐ 16

☐ 8

☐ 2

☐ 4

正确答案

$$(A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4) \vee (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4)$$

The translation is
equi-satisfiable.

$$(Z \rightarrow (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4)) \wedge (\neg Z \rightarrow (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4))$$

The translation is
not equivalent.

$$\begin{aligned} & (Z \rightarrow (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4)) \wedge (\neg Z \rightarrow (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4)) \\ &= (\neg Z \vee (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4)) \wedge (Z \vee (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4)) \\ &= (\neg Z \vee A1) \wedge (\neg Z \vee A2) \wedge (\neg Z \vee A3) \wedge (\neg Z \vee A4) \\ & \quad \wedge (Z \vee B1) \wedge (Z \vee B2) \wedge (Z \vee B3) \wedge (Z \vee B4) \end{aligned}$$

► CNF Generated via Switch Variables

$$P_1 = P_{11} \wedge P_{12} \cdots \wedge P_{1n_1}$$

$$P_2 = P_{21} \wedge P_{22} \cdots \wedge P_{2n_2}$$

...

$$P_m = P_{m1} \wedge P_{m2} \cdots \wedge P_{mn_m}$$

$m - 1$ new variables,
 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ clauses,
 $m, m, m - 1, \dots, 2$ literals in each clause.

$$P_1 \vee P_2 \cdots \vee P_m$$



Given a DNF, we can
directly output the CNF in
this form.

$$\begin{aligned} & ((\neg Z_1 \vee \neg Z_2 \vee \dots \neg Z_{m-1}) \vee P_1) \wedge \\ & ((Z_1 \vee \neg Z_2 \vee \dots \neg Z_{m-1}) \vee P_2) \wedge \\ & ((\neg Z_2 \vee \dots \neg Z_{m-1}) \vee P_3) \wedge \\ & \dots \\ & ((Z_{m-1}) \vee P_m) \end{aligned}$$

未回答

问题 4

0 / 10 分

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

$1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

现在反复使用UnitPropagate Rule, 最多可以推出多少个原子命题的真值?

正确答案

☐ 1

☐ 0

☐ 2

☐ 3

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

$1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$1^d 3 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

最多只能推出3是T



DPLL

未回答

问题 5

0 / 10 分

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$
 $1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$
 请用 DPLL 继续求解上面的式子，如果再次需要用到 decide rule，请先猜测 2 的真值是 T。那么中间需要用到 () 次 backtrack rule。

☐ 0
☐ 1
☐ 2
☐ 3

正确答案

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$
 $1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$
 $1^d 3 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$
 $1^d 3 2^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$
 $1^d 3 2^d \bar{4} \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (BackTrack)$
 $1^d 3 2 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$
 $1^d 3 2 \bar{4} \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (BackTrack)$
 $\bar{1} \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$
 $\bar{1} 3 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$
 $\bar{1} 3 4 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$
 $\bar{1} 3 4 2 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4$

► Lab1 问题

- 河中有 n 个石头，Tom 和 Jerry 想要踩着石头过河，这些石头有**两种状态**，要么浮在水面上，要么沉在水底。河边有 m 个开关，控制石头的沉浮。**每个开关控制 1 或 2 个石头，每块石头被 1 或 2 个开关控制**。每次打开或关闭一个开关，这个开关控制的石头都会改变状态，从水下浮到水上或者从水上沉到水下。
- 一开始所有开关都是关闭的，石头有的在水上有的在水下。请利用 MiniSat 来判断如何控制这些开关使得**所有石头同时浮在水上**。

MiniSat

- solver
- variables
- clause(CNF)
- solve
- modelValue

```
int main()
{
    // Create a solver
    Solver solver;

    // Create variables
    auto A = solver.newVar();
    auto B = solver.newVar();
    auto C = solver.newVar();

    // Add the clauses
    // ( $\neg A \vee \neg B \vee C$ )
    solver.addClause(~mkLit(A), ~mkLit(B), mkLit(C));
    // ( $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ )
    solver.addClause(~mkLit(A), ~mkLit(B), ~mkLit(C));
    // ( $A \vee \neg B \vee C$ )
    solver.addClause(mkLit(A), ~mkLit(B), mkLit(C));

    // Solve the problem
    auto sat = solver.solve();

    // Check solution and retrieve model if found
    if (sat)
    {
        std::clog << "SAT\n"
                    << "Model found:\n";
        std::clog << "A := " << (solver.modelValue(A) == l_True) << '\n';
        std::clog << "B := " << (solver.modelValue(B) == l_True) << '\n';
        std::clog << "C := " << (solver.modelValue(C) == l_True) << '\n';
        return 0;
    }
    else
    {
        std::clog << "UNSAT\n";
        return 1;
    }
}
```

► Lab1

- **重点**

- 每个开关控制 1 或 2 个石头
- 每块石头被 1 或 2 个开关控制

- **思路**

- 开关 i 的状态命题变项 A_i 表示
- 石头 i 的状态用命题公式 P_i 表示, P_i 可以用 A_i 表示
- 最后需要解决的是 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ 的可满足性问题

► Lab1

- 如何用开关的状态 A_i 表示石头的状态 P_i
 - 石头初始状态
 - 石头被几个开关控制
- 简化情况：1个开关控制1个石头，1个石头被1个开关控制
 - 若石头初始在水面上， $P_i = \neg A_i$
 - 若石头初始在水面下， $P_i = A_i$
- 题目中每个石头被1或2个开关控制



Lab1

• 环境安装问题

https://oc.sjtu.edu.cn/courses/59804/discussion_topics/134661



蓝浩宁

2023 10月 7



Lab1配置环境的过程中，有同学遇到“libc6-dev : Depends: libc6 (= 2.35-0ubuntu3.4) but 2.35-0ubuntu3 is to be installed”的问题，截图如下：

```
E: Unable to correct problems, you have held broken packages.
Installation complete
cdm@cdm-virtual-machine:~/Desktop/lab1$ ./install_minisat.sh
Start installing minisat...
Hit:1 http://mirrors.tuna.tsinghua.edu.cn/ubuntu jammy InRelease
Hit:2 http://security.ubuntu.com/ubuntu jammy-security InRelease
Reading package lists... Done
Building dependency tree... Done
Reading state information... Done
226 packages can be upgraded. Run 'apt list --upgradable' to see them.
Reading package lists... Done
Building dependency tree... Done
Reading state information... Done
zip is already the newest version (3.0-12build2).
zip set to manually installed.
Some packages could not be installed. This may mean that you have
requested an impossible situation or if you are using the unstable
distribution that some required packages have not yet been created
or been moved out of Incoming.
The following information may help to resolve the situation:

The following packages have unmet dependencies:
 libc6-dev : Depends: libc6 (= 2.35-0ubuntu3.4) but 2.35-0ubuntu3 is to be installed
E: Unable to correct problems, you have held broken packages.
Installation complete
cdm@cdm-virtual-machine:~/Desktop/lab1$
```

解决方案：

打开install_minisat.sh，将其中的“libc6=2.35-0ubuntu3”改为“libc6=2.35-0ubuntu3.4”，保存后再次运行install_minisat.sh。完成后在终端输入make example，若输出和lab1文档中描述一致则环境配置成功。

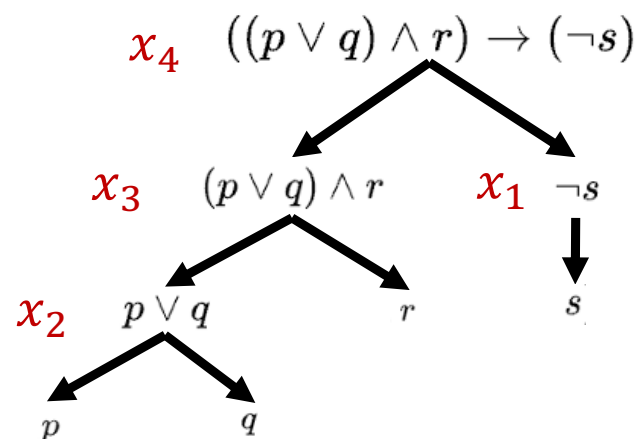
若有其它问题请及时联系助教。

► Tseytin变换 (补充内容)

- 目的：将一个命题逻辑公式转换为可满足性等价的合取范式 (CNF)
- 基本思路：为每个子公式都引入一个新的布尔变量来表示

Tseytin变换

举例: $\phi := ((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (\neg s)$



所有子句:

- $\neg s$
- $p \vee q$
- $(p \vee q) \wedge r$
- $((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (\neg s)$

$$\begin{aligned}
 x_2 \leftrightarrow p \vee q &\equiv (x_2 \rightarrow (p \vee q)) \wedge ((p \vee q) \rightarrow x_2) \\
 &\equiv (\neg x_2 \vee p \vee q) \wedge (\neg(p \vee q) \vee x_2) \\
 &\equiv (\neg x_2 \vee p \vee q) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee x_2) \\
 &\equiv (\neg x_2 \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee x_2) \wedge (\neg q \vee x_2)
 \end{aligned}$$

使用新的变量表示子句:

- $x_1 \leftrightarrow \neg s$
- $x_2 \leftrightarrow p \vee q$
- $x_3 \leftrightarrow x_2 \wedge r$
- $x_4 \leftrightarrow x_3 \rightarrow x_1$

表示原式: $T(\phi) := x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow x_3 \rightarrow x_1) \wedge (x_3 \leftrightarrow x_2 \wedge r) \wedge (x_2 \leftrightarrow p \vee q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg s)$

Tseytin变换

	Type	Operation	CNF sub-expression
$\wedge$	 AND	$C = A \cdot B$	$(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee \bar{C}) \wedge (B \vee \bar{C})$
	 NAND	$C = \overline{A \cdot B}$	$(\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
$\vee$	 OR	$C = A + B$	$(A \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (\bar{B} \vee C)$
	 NOR	$C = \overline{A + B}$	$(A \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee \bar{C}) \wedge (\bar{B} \vee \bar{C})$
$\neg$	 NOT	$C = \bar{A}$	$(\bar{A} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee C)$
	 XOR	$C = A \oplus B$	$(\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) \wedge (A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C)$
$\leftrightarrow$	 XNOR	$C = \overline{A \oplus B}$	$(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$

Q & A