

第二次习题课

离散数学

► 习题课内容

- **Homework**
 - 谓词逻辑
 - 霍尔逻辑
- **Lab**
 - Lab2
 - Lab3
- **Q&A**

► 谓词逻辑

复习作业6

合式公式定义：

(1) 命题常项、命题变项和原子谓词公式(不含联结词的谓词)都是合式公式。

(2) 如果 A 是合式公式, 则 $\neg A$ 也是合式公式。

(3) 如果 A, B 是合式公式, 而无变元 x 在 A, B 的一个中是约束的而在另一个中是自由的, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式(最外层括号可省略)。

(4) 如果 A 是合式公式, 而 x 在 A 中是自由变元, 则 $(\forall x)A, (\exists x)A$ 也是合式公式。

(5) 只有适合以上 4 条的才是合式公式。

未回答

问题 7

以下哪些公式是合式公式?

☐ $(\forall x)(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \wedge Q(x))$

☐ $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge (\exists x)R(x) \wedge S(x)$

正确回答

☐ $(\exists x)(\exists y)(P(x, y, z) \rightarrow S(u, v))$

正确回答

☐ $(\forall x)P(x, y) \wedge Q(z)$

☐ $(\exists x)((\forall y)P(y) \rightarrow Q(x, y))$

复习作业6

未回答

问题 8

0 / 10 分

若个体域为整数集，那么下列哪些式子的真值为 F ？

正确回答

- ☐ $(\exists x)(\forall y)(x = -y)$ 存在 x ，对任意 y ， $x = -y$
- ☐ $(\exists x)(\forall y)(x + y = y)$ 存在 x ，对任意 y ， $x + y = y \Rightarrow x = 0$
- ☐ $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$ 对任意 x ，存在 y ， $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$
- ☐ $(\exists x)(\forall y)(x > y)$ 存在 x ，对任意 y ， $x > y$

正确回答

复习作业7

$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \\ & = (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \end{aligned}$$

未回答

问题 6

0 / 10 分

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$ 是

☐ 普遍有效的

☐ 不可满足的

正确答案

☐ 可满足的

☐ 不确定

复习作业7

未回答

问题 9

0 / 10 分

(多选题) 下列推理中正确的有 () 。

正确回答

☐ $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

正确回答

☐ $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

正确回答

☐ $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

☐ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

反例: $x \in \{1,2\}, P(1) = T, P(2) = F,$
 $Q(1) = F, Q(2) = F$

P77基本的推理公式 (3)

P77基本的推理公式 (4)

反例: $x \in \{1,2\}, P(1) = T, P(2) = F,$
 $Q(1) = F, Q(2) = T$

复习作业7

未回答

问题 10

0 / 10 分

(多选题) 使用推理规则法证明
 $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \Rightarrow P(a)$ 时,

- ☐ 必须使用三段论
- ☐ 必须使用存在量词消去规则
- ☐ 至少使用两次全称量词消去规则
- ☐ 必须使用分离规则 (假言推理)

正确答案

正确答案

复习作业7

$$(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \Rightarrow P(a)$$

① $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x))$

② $(\forall x)\neg Q(x)$

③ $\neg P(x) \rightarrow Q(x)$

④ $\neg Q(x)$

⑤ $\neg Q(x) \rightarrow P(x)$

⑥ $P(x)$

⑦ $(\forall x)P(x)$

⑧ $P(a)$

前提

前提

① 全称量词消去

② 全称量词消去

③ 置换

④⑤ 分离

⑥ 全称量词引入

⑦ 全称量词消去

预习作业6

未回答

问题 1

0 / 20 分

以下哪些等值式是正确的?

正确答案

☐ $\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$

☐ $(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$

$$\begin{aligned}(\forall x)(P(x) \rightarrow q) &= (\forall x)(\neg P(x) \vee q) \\ &= (\forall x)\neg P(x) \vee q = \neg(\exists x)P(x) \vee q \\ &= (\exists x)P(x) \rightarrow q\end{aligned}$$

正确答案

☐ $(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$

☐ $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

预习作业6

未回答

问题 3

0 / 20 分

谓词逻辑的任一公式都可以化为相应的Skolem标准形（只保留全称量词的前束形），且可满足性等价。

正确答案

☐ True

☐ False

定理 5.3.3 谓词逻辑的任一公式 A ，都可化成相应的 Skolem 标准形（只保留全称量词的前束形），并且 A 是不可满足的当且仅当其 Skolem 标准形是不可满足的。

↕
可满足性等价

复习作业8

$$\begin{aligned}
 & \neg(\forall x)(\exists y) \left((P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge (R(x, y) \vee S(x, y)) \right) \\
 &= (\exists x)(\forall y) \left(\neg(P(x, y) \vee Q(x, y)) \vee \neg(R(x, y) \vee S(x, y)) \right) \\
 &= (\exists x)(\forall y) \left(\neg(P(x, y) \vee Q(x, y)) \vee (\neg R(x, y) \wedge \neg S(x, y)) \right) \\
 &= (\exists x)(\forall y) \left((P(x, y) \vee Q(x, y)) \rightarrow (\neg R(x, y) \wedge \neg S(x, y)) \right)
 \end{aligned}$$

未回答

问题 3

0 / 10 分

(多选题) 下面的等价式中, 正确的有 () 。

正确回答

☐ $\neg(\forall x)(\exists y)((P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge (R(x, y) \vee S(x, y)))$
 $= (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \vee Q(x, y)) \rightarrow (\neg R(x, y) \wedge \neg S(x, y))$

正确回答

☐ $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

正确回答

☐ $\neg(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x) \wedge Q(y) \wedge R(x, y))$
 $= (\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \neg R(x, y))$

☐ $(\forall y)(\exists x)((P(x) \rightarrow q) \vee S(y)) = ((\exists x)P(x) \rightarrow q) \vee (\forall y)S(y)$

$$\begin{aligned}
 & (\forall y)(\exists x)((P(x) \rightarrow q) \vee S(y)) \\
 &= (\exists x)(P(x) \rightarrow q) \vee (\forall y)S(y) \\
 &= (\exists x)(\neg P(x) \vee q) \vee (\forall y)S(y) \\
 &= \neg(\forall x)P(x) \vee q \vee (\forall y)S(y) \\
 &= ((\forall x)P(x) \rightarrow q) \vee (\forall y)S(y)
 \end{aligned}$$

复习作业8

$$\begin{aligned}
 & ((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \wedge (\exists x)R(x)) \vee ((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \wedge (\exists x)S(x)) \\
 &= ((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)R(x)) \vee ((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)S(x)) \\
 &= (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge ((\exists x)R(x) \vee (\exists x)S(x)) \\
 &= (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)(R(x) \vee S(x))
 \end{aligned}$$

未回答

问题 4

0 / 10 分

(多选题) 下面的等价式中, 正确的有 ()。

正确回答

☐

$$(\forall x)(P(x) \vee q) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge q) = ((\exists x)\neg P(x) \wedge \neg q) \vee ((\exists x)P(x) \wedge q)$$

☐ $(\forall x)(\exists y)P(x, y) = (\exists y)(\forall x)P(x, y)$

正确回答

☐

$$\begin{aligned}
 & ((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \wedge (\exists x)R(x)) \vee ((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \wedge (\exists x)S(x)) \\
 &= (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)(R(x) \vee S(x))
 \end{aligned}$$

正确回答

☐ $(\forall x)P(x) \rightarrow q = (\exists x)(P(x) \rightarrow q)$

$$\begin{aligned}
 & (\forall x)(P(x) \vee q) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge q) \\
 &= \neg (\forall x)(P(x) \vee q) \vee (\exists x)(P(x) \wedge q) \\
 &= (\exists x)\neg (P(x) \vee q) \vee (\exists x)(P(x) \wedge q) \\
 &= ((\exists x)\neg P(x) \wedge \neg q) \vee (\exists x)(P(x) \wedge q)
 \end{aligned}$$

复习作业8

未回答

问题 7

0 / 10 分

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x, y)) \vee (\forall z)R(z)$ 的Skolem 标准形是

☐ $(\forall z)(\neg P(a) \vee Q(a, b) \vee R(z))$

正确答案

☐ $(\forall x)(\forall z)(\neg P(x) \vee Q(x, f(x)) \vee R(z))$

☐ 这些都不对

☐ $(\forall x)(\forall z)(\neg P(x) \vee Q(x, f(z)) \vee R(z))$

Skolem标准形

$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x, y)) \vee (\forall z)R(z) \\ &= (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(x, y)) \vee (\forall z)R(z) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg P(x) \vee Q(x, y) \vee R(z)) \end{aligned}$$



$$(\forall x)(\forall z)(\neg P(x) \vee Q(x, f(x)) \vee R(z))$$

或者

$$(\forall z)(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x, f(x, z)) \vee R(z))$$

复习作业8

未回答

问题 10

0 / 10 分

使用归结法对

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \rightarrow P(x))$

作推理演算需要归结 () 次。

☐ 1

☐ 3

☐ 2

☐ 4

正确答案

► 复习作业8

建立子句集 $\{P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee \neg R(x), R(x), \neg P(x)\}$

① $P(x) \vee Q(x)$

② $\neg Q(x) \vee \neg R(x)$

③ $R(x)$

④ $\neg P(x)$

⑤ $Q(x)$

①④ 归结

⑥ $\neg Q(x)$

②③ 归结

⑦ $\square$

⑤⑥ 归结

复习作业9

未回答

问题 4

0 / 10 分

利用 EUF 求解 $(a = f(c)) \wedge (b = f(d)) \wedge (a \neq b) \wedge (c = d)$ ，一开始图中有几个圆圈。

☐ 4

☐ 6

☐ 其它答案都不对

☐ 2

正确答案

未回答

问题 5

0 / 10 分

利用 EUF 求解 $(a = f(c)) \wedge (b = f(d)) \wedge (a \neq b) \wedge (c = d)$ ，最终图中有几个圆圈。

☐ 其它答案都不对

☐ 2

☐ 3

☐ 1

正确答案

复习作业9

未回答

问题 4

0 / 10 分

利用 EUF 求解 $(a = f(c)) \wedge (b = f(d)) \wedge (a \neq b) \wedge (c = d)$ ，一开始图中有几个圆圈。

☐ 4

☐ 6

☐ 其它答案都不对

☐ 2

正确答案

未回答

问题 5

0 / 10 分

利用 EUF 求解 $(a = f(c)) \wedge (b = f(d)) \wedge (a \neq b) \wedge (c = d)$ ，最终图中有几个圆圈。

☐ 其它答案都不对

☐ 2

☐ 3

☐ 1

正确答案

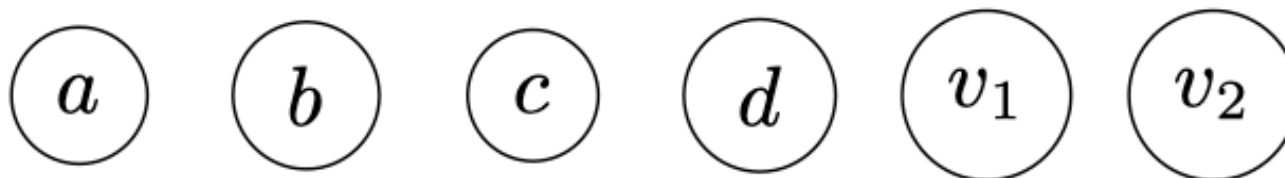
复习作业9

$$(a = f(c)) \wedge (b = f(d)) \wedge (a \neq b) \wedge (c = d)$$



$$a = v_1, b = v_2, a \neq b, c = d$$

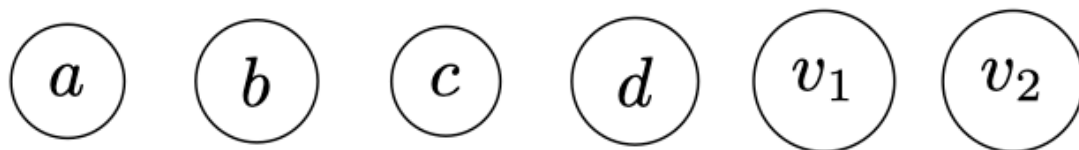
$$v_1 := f(c), v_2 := f(d)$$



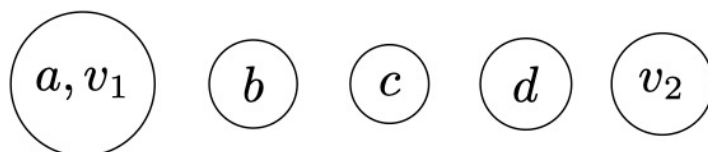
$$a = v_1, b = v_2, a \neq b, c = d$$

$$v_1 := f(c), v_2 := f(d)$$

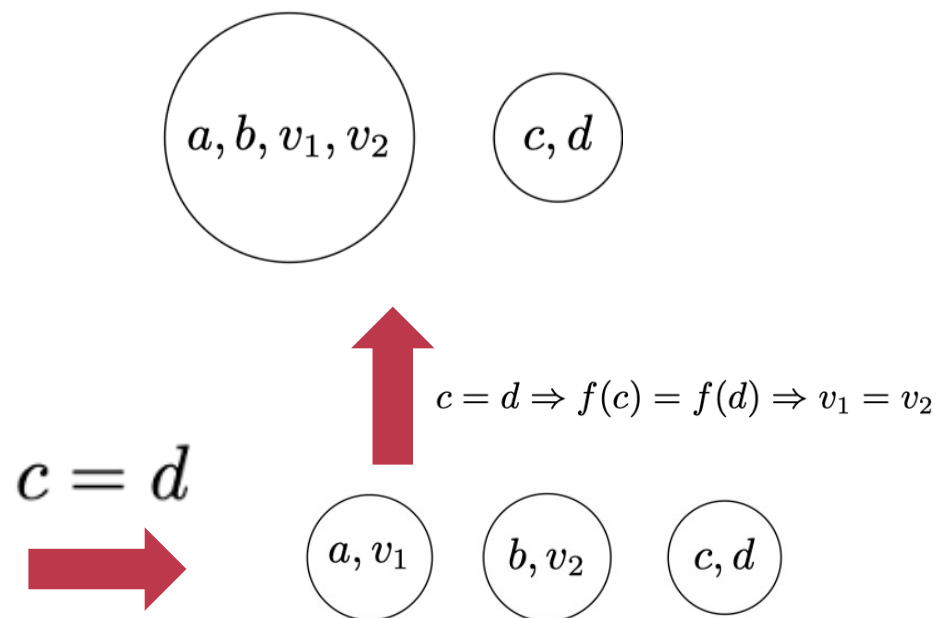
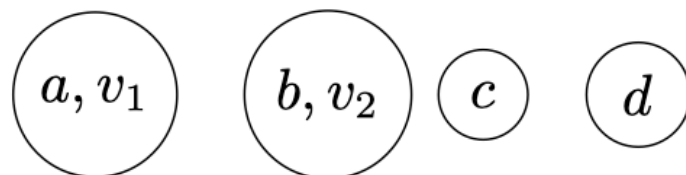
复习作业9



$$a = v_1$$



$$b = v_2$$



推理规则

$$(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \Rightarrow P(a)$$

① $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x))$

② $(\forall x)\neg Q(x)$

③ $\neg P(x) \rightarrow Q(x)$

④ $\neg Q(x)$

⑤ $\neg Q(x) \rightarrow P(x)$

⑥ $P(x)$

⑦ $(\forall x)P(x)$

⑧ $P(a)$

前提

前提

① 全称量词消去

② 全称量词消去

③ 置换

④⑤ 分离

⑥ 全称量词引入

⑦ 全称量词消去

务必按照格式进行推理

► 霍尔逻辑

预习作业10

未回答

问题 2

0 / 20 分

按照课件上对谓词逻辑公式之间强弱关系的定义， T 是最强的谓词逻辑公式。

☐ True

☐ False

正确答案

如果 $P1 \rightarrow P2$ 成立，那么就说 $P1$ 比 $P2$ 强， $P2$ 比 $P1$ 弱。

F 才是最强的谓词逻辑公式

复习作业12

未回答

问题 1

0 / 10 分

霍尔三元组 $\{a = 1\}while(a \neq 0)skip\{a = 0\}$ 成立。

正确回答

☐ True

☐ False

注意，这里讲的霍尔逻辑只能保证 **partial correctness**，意思是如果 $\{P\}C\{Q\}$ 成立，也不能保证程序 C 必定终止。

霍尔三元组只是定义如果程序能终止，那么程序会实现什么功能。也就是说，对任意的 P 和 Q ， $\{P\}while(1);\{Q\}$ 都成立，因为 $while(1)$ ；根本不能终止。

证明

$$\{b > 3\} a := 2 * b; a := a - b \{a \geq 4\}$$

Proof.

$$(1) \{a - b \geq 4\} a := a - b \{a \geq 4\}$$

$$(2) \{2 * b - b \geq 4\} a := 2 * b \{a - b \geq 4\}$$

$$(3) b > 3 \rightarrow 2 * b - b \geq 4$$

$$(4) \{b > 3\} a := 2 * b \{a - b \geq 4\}$$

$$(5) \{b > 3\} a := 2 * b; a := a - b \{a \geq 4\}$$

AS

AS

predicate logic

SP(2)(3)

SC(1)(4)

请务必按照格式进行推理！！！！



► Lab2

- 实现一个MiniSEE
- TODO
 - 阅读文档和观看lab2.mp4
 - 实现三个函数
 - mystoi
 - copy_exp_tree
 - analyze_if
 - 运行 make run测试正确性
 - make handin并提交至canvas

DDL 12.6

▶ Lab2

• Z3无法下载



蓝浩宁

2023 11月 1

⋮

如果同学们在做lab2的时候遇到了无法git clone z3 的问题，可以做以下操作：

1. 在canvas上下载[z3源码](#)
2. 解压z3.zip并将解压后的z3文件夹后放到lab2/smt目录下
3. 注释或删除install_z3.sh第5行（git clone https://ghproxy.com/https://github.com/Z3Prover/z3.git z3）
4. 重新运行install_z3.sh

由 [蓝浩宁](#) 于 11月 1 23:46 编辑

↩ 回复

► Lab3

- 利用Dafny验证程序
- TODO
 - 阅读文档和Dafny教程
 - 编写合适的precondition & predicate
 - 运行 make method[1,2,3] 测试正确性
 - make handin并提交至canvas

DDL 12.29

Q & A